ECG1 *TD n°18 : Probabilités sur un univers quelconque*

Exercice 1. Union infini et intersection infini

On pose pour tout $n \geq 1$, $A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. Déterminer les ensembles suivants

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n, \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{N} A_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$$

De même pour $A_n = \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$.

Exercice 2. Infinité de lancers de pièce

On effectue une infinité de lancers d'une pièce truquée où $p \in]0,1[$ est la probabilité d'avoir pile. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
A_n "ne pas avoir de pile durant les n premiers lancers".
B "n'avoir aucun pile".
C_n "avoir un pile au n-ème lancer".

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. En déduire $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 3. Réussite après un nombre fini de tirages

Une urne contient des boules vertes, en proportion $v \in]0,1[$ et rouges, en proportion $r \in]0,1[$. On effectue des tirages avec remise d'une boule dans l'urne. Le but est de montrer que presque sûrement, on obtient une boule rouge en un nombre fini de tirages. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
A_n " on a obtenu une boule rouge au n-ème tirage".

1. Méthode 1 : Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
   C_n " on a obtenu la première boule rouge en moins de n tirages".
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(C_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Conclure.
2. Méthode 2 : Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
   D_n " on a obtenu la première boule rouge au n-ème tirage".
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(D_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Conclure.

Exercice 4. Pas de pile après un face

On effectue une infinité de lancers d'une pièce équilibrée et on pose pour $n \geq 2$:
A_n "au cours des n premiers lancers, face n'est jamais suivi de pile".

1. (a) Déterminer $\mathbb{P}(A_n)$ pour $n \geq 2$.
   (b) Est-il probable que face ne soit jamais suivi de pile après un grand nombre de lancers ?
2. On dispose désormais d'une pièce truquée, dont la probabilité d'obtenir "face" est $p \neq 1/2$.
   (a) Montrer alors que pour $n \geq 2$,
   $$\mathbb{P}(A_n) = \frac{p^{n+1} - (1-p)^{n+1}}{2p-1}.$$
   (b) Dans ce cas, est-il probable que face ne soit jamais suivi de pile après un grand nombre de lancers ?

Exercice 5. Jeu de société

Deux joueurs A et B jouent chacun avec deux dés équilibrés. A gagnera en amenant un total de 7 et B en amenant un total de 6. B joue le premier et ensuite (s'il y a une suite), A et B jouent alternativement.
Le jeu s'arrête dès que l'un des deux gagne.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir un total de 6 (resp. 7) en lançant 2 dés.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants pour $n \in \mathbb{N}^*$
   A_n "A gagne à son n-ème lancer".
   B_n "B gagne à son n-ème lancer".
3. À l'aide des événements précédents, décrire les événements
   F "A gagne ".
   G "B gagne ".
4. En déduire la probabilité de succès de B (resp. A). Y-a-t'il toujours un gagnant ? Le jeu est-il équilibré ?

Exercice 6. Sauts de puce

Une puce évolue sur trois cases A, B et C. A l'instant $t = 0$, la puce se trouve sur la case A, puis elle se déplace de façon aléatoire sur ces cases selon la règle suivante. Si la puce se trouve en A ou B à l'instant $t = n$, elle ira sur l'une des deux autres cases avec équiprobabilité à l'instant $t = n + 1$. Si la puce se trouve en C à l'instant $t = n$, elle y restera à l'instant $t = n + 1$.
On note A_n, resp B_n, C_n l'événement : "la puce se trouve en A (resp. B, C) à l'instant $t = n$" et on note a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes.

1. Etablir une relation de récurrence entre a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} et a_n, b_n, c_n.
2. Remarquer que la suite $(a_n + b_n)$ est géométrique et déduire la valeur de c_n en fonction de n.
3. Déterminer les expressions de b_n et a_n en fonction de n.
4. Calculer la probabilité de l'événement E "la puce atteint la case C".
5. Sachant que la puce est en C à l'instant $t = n + 1$, calculer la probabilité qu'elle y ait été pour la première fois à l'instant $t = n$.

Exercice 7. Jeu de société (bis)

Un jeu consiste à déplacer un jeton autour des sommets d'un carré $AGBP$ à l'aide d'un dé à 6 faces. A chaque tour, le joueur lance le dé et déplace le jeton du nombre de sommets donné par le dé et dans le sens trigonométrique ; le joueur joue jusqu'à tomber sur G, il a alors gagné, ou jusqu'à tomber sur P, il a alors perdu. Le joueur J choisit de partir du sommet A et le joueur J' du sommet B. Considérons les événements :
V "J gagne"
V' "J' gagne"
B_1 "J va en B à l'issue du premier lancer".
B_1' "J' va en B à l'issue du premier lancer".

1. Déterminer un système complet d'événements adapté au jeu qui contient B_1.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales appliquée à ce système complet d'événements, démontrer que
$$\mathbb{P}(V) = \frac{2}{5}(1 + \mathbb{P}(V')).$$
3. Démontrer de même que
$$\mathbb{P}(V') = \frac{1}{5}(1 + 2\,\mathbb{P}(V)).$$
4. En déduire alors $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(V')$.

Exercice 8. Formule des probabilités totales avec un système complet d'événements de taille infinie

On considère une infinité d'urnes numérotées. La probabilité de choisir l'urne numéro n (avec $n \geq 1$) est égale à $\dfrac{1}{2^n}$.

L'urne numéro n est composée de 2^n boules dont une seule blanche. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?